SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. BERNARDI
A. BOVE

OPERATORI IPERBOLICI A CARATTERISTICHE MULTIPLE

21 APRILE 1988
28 APRILE 1988

1. NOTAZIONI, IPOTESI e RISULTATI

Nell'aperto $\Omega\subset R^{n+1}$ $x = (x_0,x_1,\ldots,x_n) = (x_0,x')$ consideriamo il problema di Cauchy $P(x,D)u = f$, con dati di Cauchy sull'ipersuperficie non caratteristica $x_0 = o$. P è un operatore differenziale lineare d'ordine m a coefficienti $C^\infty(\Omega)$, $P = P_m + P_{m-1} + \ldots + P_o$. $(D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x})$. Se $\Omega_t = \{x \quad \Omega | x_0 < t\}$ ricordiamo che il problema di Cauchy per P si dice ben posto in Ω_t se

(i) $\forall f\in C_0^\infty(\Omega)$ $\exists u\in \mathscr{E}'(\Omega)$, $Pu = f$ in Ω_t

(ii) $\forall u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ $Pu = 0$ in $\Omega_t \Rightarrow u = 0$ in Ω_t.

Faremo su P le seguenti ipotesi:

H1) Il simbolo principale di P, $P_m(x,\xi)$ è iperbolico rispetto a ξ_o, i.e. $P_m(x,\xi_o,\xi') = 0$ ha sempre soluzioni $\xi_o(x,\xi')$ reali, $\forall x\in\Omega$ e $\xi'\in R^n$.

H2) Le radici caratteristiche di $\xi_o \to P_m(x,\xi_o,\xi') = 0$ hanno molteplicità al più d'ordine 3 e l'insieme dei punti tripli:

$$\Sigma = \{(x,\xi)\in \dot{T}^*\Omega | p_m(x,\xi) = 0,\ dp_m(x,\xi) = 0,\ d^2p_m(x,\xi) = 0\}$$

è una sottovarietà C^∞ di $\dot{T}^*\Omega$ tale che rango $\sigma|_\Sigma$ = costante e la 1 forma ω non si annulla identicamente su $T\Sigma$(*)

H3)$_p$ $(\rho\in\Sigma)$. Sia $P_{m,\rho}$ la localizzazione di P_m in p. E' un polinomio omogeneo del terz'ordine iperbolico rispetto a $(0,e_o)$ definito da $P_m(p+s\delta z) = S^3(P_{m,\rho}(\delta z)+O(1))$ $\delta z\in T_p(T^*\Omega)$. Su $P_{m,p}$ richiediamo che:

(*) Questo esclude che Σ sia isotropa, i.e. $T\Sigma\subset T^\sigma\Sigma$

(i) $P_{m,\rho}(\delta z) = L_1(\delta z) \cdot Q_2(\delta z)$

con $L_1(\delta z) = \delta\xi_o - \ell_1(\delta x,\delta\xi')$ e ℓ_1 forma lineare reale in $(\delta x,\delta\xi')$ $(\delta z = (\delta x,\delta\xi))$.

(ii) $Q_2(\delta z)$ è una forma quadratica iperbolica reale tale che:

a) $\dim \ker F_{Q_2} = \dim T_\rho \Sigma$

b) $\ker F^2_{Q_2} \cap \mathrm{Im} F^2_{Q_2} = \{o\}$

c) $sp(F_{Q_2}) \subset iR$.

d) $\dim \mathrm{Im} F^2_{Q_2} \geq 2$

$H4)_{p,\ell}$ $H_{L_1} \in \Gamma^\sigma_{Q_2} \cap \ker F_{Q_2}$

$H4)_{\rho,s}$ $H_{L_1} \in \mathrm{Int}(\Gamma^\sigma_{Q_2}) \cap T_\rho \Sigma$

dove $\Gamma_{Q_2}(\rho)$ denota il cono di iperbolicità di Q_2, i.e. la componente connessa che contiene $(0,e_o)$ di $\{\delta z \in T_\rho(\dot{T}^*\Omega) | Q_2(\delta z) \neq 0\}$ e $\Gamma^\sigma_{Q_2}$ è il polare simplettico di Γ_{Q_2}, $= \{\delta z | \sigma(\delta z',\delta z) \geq 0, \ \delta z' \in \Gamma Q_2\}$. Il nostro primo risultato è il seguente

<u>Teorema 1.</u> Sia Ω aperto in R^{n+1}, $0 \in \Omega$ e supponiamo che il Problema di Cauchy sia ben posto in Ω_t, per t piccolo. Sia ρ Σ un punto caratteristico triplo per p_m. Valgano inoltre H1), H3) (i), (ii)c) e $H4)_{\rho,\ell}$. Allora le seguenti condizioni di Levi sono necessarie:

$L1)_\ell$ $\mathrm{Re}\, p^s(\rho) = 0$,

$H_{Tr+F_{Q_2} L_1} \pm \mathrm{Re}\, \dot{p}^s(\rho) \in \Gamma^\sigma_p(\rho)$

L2) $\operatorname{Im} p^s(\rho) = 0,\ H_{\operatorname{Im} p^s(\rho)} = 0.$

Il secondo risultato riguarda la sufficienza delle condizioni di Levi

Teorema 2. P verifichi le ipotesi H1), H2), $H3)_\rho$, $H4)_{\rho,s}$ $\rho \in \Sigma$. Allora, se:

$L1)_S$ $\operatorname{Re} p^s(\rho) = 0,\ \forall \rho \in \Sigma$

$$H_{\operatorname{Tr}+F_{Q_2}} L_1 \pm \operatorname{Re} p^s(\rho) \in \operatorname{Int}(\Gamma^\sigma_p(\rho)),\quad \forall \rho \in \Sigma$$

L2) $\operatorname{Im} p^s(\rho) = 0,\ H_{\operatorname{Im} p^s(\rho)} = 0,\ \forall \rho \in \Sigma$

il Problema di Cauchy per P in Ω_0 è ben posto.

(qui $p^s(\rho) = P_{m-1}(\rho) + \frac{i}{2} \nabla_{x,\xi} P_m(\rho)$ è il simbolo sottoprincipale di P in ρ; lo Hamiltoniano di una forma lineare L_1 è il differenziale letto via σ, $\sigma(t,H_{L_1}) = \langle t, dL_1 \rangle$)

Alcune osservazioni

L'ipotesi $H4)_{\rho,s}$ implica che $P_{m,\rho}$ è un operatore strettamente iperbolico e che $\Gamma_p(\rho) = \Gamma_{Q_2}$. Inoltre si ha che $H_{L_1} \in T_\rho\Sigma \cap (T_\rho\Sigma)^\sigma$, che è lo spazio tangente in ρ alla foglia F_ρ della foliazione naturale che esiste su Σ per H_2). Questo implica in particolare che nessuna bicaratteristica nulla di P ha punti limite su Σ. Dalle carateristiche doppie [B-B]1 si sa che nel caso non-effettivo iperbolico il flusso Hamiltoniano ha punti limite su Σ precisamente in situazioni in cui ancora non si conoscono condizioni sufficienti per la buona posizione del problema di Cauchy. L'ipotesi $H3)_\rho$ (i) assicura che non ci sono variabili normali a Σ in cui P_m degenera più velocemente, mentre $H3)_\rho$ (ii) garantisce che F_{Q_2} non ha blocchi di Jordan d'ordine 4 nello zero.

Che H1) sia necessaria è una conseguenza del Teorema di Lax-Mizohata

(vedi [H]). Le condizioni di Levi $L1)_{s,\ell}$ e L2) contengono in particolare le condizioni necessarie di Ivrii-Petkov che in questo caso dicono che $P_{m-1}(\rho) = 0$, se $\rho \in \Sigma$. Se P è completamente fattorizzato, i.e. $P = L \cdot B$, dove $L(x,D) = D_o - \ell(x,D')$ e B è un operatore non effettivamente iperbolico, le nostre condizioni si riducono alle solite condizioni di Ivrii-Petkov-Hörmander per B. Notiamo infine che tutte le ipotesi e condizioni di Levi sono invarianti per trasformazioni canoniche.

Consideriamo un esempio per illustrare i nostri risultati (vedi [B]):

$$\text{(M)} \quad P(x,D) = (D_o - \ell D_1)\,(-D_o^2 + D_1^2 + \mu(D_2^2 + X_2^2 D_n^2)) + P_2(x,D) + P_1(x,D) + P_o(x,D).$$

qui $\ell \in R$, $\mu > 0$ equivalgono a H1)

H2) è automatica e $\Sigma = \{(x,\xi) \ \ T^*R^{n+1} \mid \xi_o = 0, \xi_1 = \xi_2 = 0,\ x_2 = 0\}$.

$H3)_\rho$ (i) e (ii) sono pure immediate ($-D_o^2 + D_1^2 + \mu\,(D_2^2 + x_2^2\,D_n^2)$ è non effettivamente iperbolico).

$H4)_{\rho,\ell}$ dice $|\ell| \leq 1$. Mentre $L1)_\ell$ e L2) sono equivalenti ad affermare, se

$P_2(x,D) = (c_o D_o + c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 x_2 D_n) D_n$, che $c_j \in R$, $j = 0,1,2,3$ e che

$$\mu \geq |c_o| + \frac{1}{\mu}\sqrt{(c_2^2 + c_3^2) + (|c_1| - \ell\mu)^2}$$

che risultano essere le condizioni necessarie e sufficienti per la buona posizione del Problema di Cauchy per l'operatore modello.

2. IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

Supponiamo che il problema di Cauchy per P in Ω_t sia ben posto. Una prima conseguenza è che se K è un compatto di Ω, $\exists \mu>0$ tale che

$$(1) \qquad \inf_{\substack{U|_{\Omega_0}=u \\ U\in\mathscr{S}}} \|U\|_{(-\mu)} = \|u\|^-_{(-\mu)} \leq C\, \|Pu\|^-_{(\mu)}\ , \quad u\in C_0^\infty(K)$$

In effetti il Teorema 1 mostra che le condizioni $L1)_\ell$, L2) sono necessarie per (1). L'idea, dovuta a Ivrii-Petkov e perfezionata da Hörmander, consiste nell'approssimare P microlocalmente vicino a una caratteristica tripla con un opportuno localizzato in modo da violare (1). Tale localizzazione deve essere eseguita utilizzando solo un sottogruppo del gruppo simplettico, vista la natura differenziale del problema e la necessità di conservare il tempo. Una classe di trasformazioni-canoniche ammissibile è senz'altro quella delle dilatazioni simplettiche $\chi(x,\xi)=(\rho^s x,\rho^{-s}\xi)$ dove $s = (s_0,s_1,\dots,s_n)\in R^{n+1}$. La (1) si dilata di conseguenza ($\rho>0$):

$$(1)' \qquad \|u\|^-_{(-\mu)} \leq C\,\rho^\tau\, \|P_\rho u\|^-_{(\mu)}\ , \quad u\in C_0^\infty(M)$$

M compatto in Ω, $P_\rho(y,D) = P(x_0\rho^{-s_0},\dots,D_0\rho^{s_0},\dots,)$, $\tau = \max 2\mu s_j$. In questo modo si assegnano pesi alle variabili e si possono evidenziare i termini d'ordine inferiore in P. Per provare che le condizioni L1) e L2) sono necessarie si tratta di costruire, supponendole negate, una serie formale $\sum_0^\infty e^{i\rho\psi}\rho^{-j}v_j = u_\rho$ che risolve asintoticamente per $\rho\to+\infty$, $P_\rho u_\rho = 0$ ma tale che $u_\rho(0) \neq 0$. In tutta la costruzione è fondamentale che $\mathrm{Im}\psi(x) \geq c|x|^2$, per "realizzare" la serie formale che definisce u_ρ. La prova procede in tre passi: prima si recuperano le condizioni necessarie di Ivrii-Petkov, $p^s(\rho) = 0$, quindi si mostra che $H_{\mathrm{Im}p^s(\rho)} = 0$ e infine che

$$H_{Tr+F_{Q_2}})L_1 \pm \mathrm{Re}p^s(\rho)\in \Gamma_p^\sigma(\rho),\ \text{dove} \quad \rho\in\Sigma.$$

Non è restrittivo supporre che $\rho = (0,e_n)$. Dilatiamo P con $\chi(x,\xi) = (x\rho^s, \xi\rho^{-s})$ con $s_j = \frac{2}{3} s_n$, $j < n$. Sviluppando secondo Taylor si ha:

$$P_\rho(x,D)=\{\sum_{\substack{|\alpha|=3\\ \alpha_n=o}} \frac{1}{\alpha!} P_m^{(\alpha)}(o,e_n)D^\alpha + P_{m-1}(o,e_n)D_n^2\}D_n^{m-3} + O(\rho^{-1/3}\quad)$$

dove $O(\rho^{-1/3}\quad)$ significa un resto che moltiplicato per $\rho^{1/3sn}$ è un polinomio omogeneo in ξ a coefficienti limitati in $C^\infty(\Omega x R^t_\rho)$, $\rho\to+\infty$.

Dilatiamo ancora con

$$(x,\xi)\to(x_o,\rho x_1,\ldots,\rho x_{n-1},x_n;\xi_o,\rho^{-1}\xi_1,\ldots,\rho^{-1}\xi_{n-1},\xi_n)$$

Se S_n è scelto abbastanza grande si ha:

$$(2)\quad P_\rho(x,D) = \{\frac{1}{6}\frac{\partial^3 P_m}{\partial\xi_o^3}(o,e_n)D_o^3 + P_{m-1}(o,e_n)D_n^2\}D_n^{m-3} + O(\rho^{-N}),\quad \forall N >>$$

Senza minor generalità $m = 3$ e $\frac{1}{6}\frac{\partial^3 P_m}{\partial\xi_o^3}(o,e_n) = 1$. Vogliamo risolvere formalmente $P_\rho u_\rho = 0$ in un intorno di 0 Ω. Cercheremo u_p nella forma:

$$u_\rho(x) = E_\rho(x)\sum_{j\geq 0}\rho^{-j/2}V_j(x)$$

dove $E_\rho(x) = \exp(i\rho^{3/2}x_n + i\phi_\rho(x))$

$$\phi_\rho(x) = i\rho(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2) + i\,\rho\,x_n^2 + \rho\gamma x_o$$

γ è la radice di $\gamma^3 + P_{m-1}(o,e_n) = 0$

con $\operatorname{Im}\gamma < 0$, se $P_{m-1}(o,e_n) \neq 0$.

Da (2) si ha:

$$E_\rho^{-1}(x)P_\rho u_\rho(x) = [\rho^3(\gamma^3+P_{m-1}(i,e_n)) +$$

$$+ \rho^2(3\gamma^2 D_o + 4iP_{m-1}(o,e_n)x_n) + \rho^{3/2}L_1(x,D) +\ldots] \sum_{j\geq o} \rho^{-j/2} v_j(x).$$

in un intorno fissato di O,M. Vista la scelta di γ, scegliamo $v_o \in C_o^\infty(M)$ soluzione di

$$(3\gamma^2 D_o + 4iP_{m-1}(o,e_n)x_n)V_o = 0, \text{ in } M \quad v_o(0) = 1.$$

Allora v_j, $j>1$, si trovano per iterazione. E' facile allora vedere che (1)' è contraddetta. Si procede come nella prova di Lax-Mizohata. Sia $\chi \in C_o^\infty(\Omega_o)$ e $\chi_p(x) = \chi(\rho^{3/2}x)\rho^{(n+1)3/2}$ allora

$$|\langle u_\rho,\chi_\rho\rangle| \leq \|\chi_\rho\|_{(\mu)}\|u\|^-_{(-u)} = O(\rho^{-N}) \quad \forall N >> 1$$

Ma $\langle u_\rho,\chi_\rho\rangle \xrightarrow[\rho\to\infty]{} v_o(o) \int e^{ix_n}\chi(x)dx \neq 0$ per una scelta opportuna di χ.

Notiamo che l'ipotesi $H3)_\rho$ non è stata sfruttata. Per provare la necessità di $L1)_\ell$ e L2) dilatiamo $P(x,D)$ secondo $\chi(x,\xi) = (\rho^S x, p^{-S}\xi)$ con $s_j = \frac{\bar{S}_n}{2}$, $j<n$. Sviluppando secondo Taylor è facile vedere che:

$$(3) \quad P_\rho(x,\xi)=(P_{m,(o,e_n)}(\xi_n x,\xi) + P_{m-1,(o,e_n)}(\xi_n x,\xi)\ _n)\xi_n^{m-3} + O(\rho^{-1/2S_n})$$

e per H3) (i), (3) è uguale a:

$$(3)' \quad P_\rho(x,\xi) = [(\xi_o - \ell_1(\xi_n x,\xi')Q_2(\xi_n x,\xi') +$$

$$+ P_{m-1,(o,e_n)}(\xi_n x,\xi)\xi_n] \cdot \xi_n^{m-3} + O(\rho^{-1/2S_n})$$

Ora bisogna procurarsi delle "buone" coordinate in $T_{(o,e_n)}(\dot{T}^*\Omega)$. I

cambi di coordinate nel tangente a $\dot{T}^*\Omega$ vengono indotti da cambi di coordinate nella base che rispettano il problema di Cauchy con dati a $x_o=0$. Si vede facilmente che questo significa considerare il sottogruppo di $Sp(T_{(o,en)}(T^*\Omega))$, gruppo lineare simplettico, che rispetta il piano lagrangiano $y=0$, (la fibra) e il vettore di periodicità (o,e_o). Si vede facilmente allora che si può decomporre $x = (x_o, x', x'', x''', x^{iv}, x_n)$, con $x' = (x_1, \dots, x_d)$
$x'' = (x_{d+1}, \dots, x_2), x''' = (x_{e+1}, \dots, x_{n'}), \; x^{iv} = (x_{n'+1}, \dots, x_{n-1})$ in modo tale che

(i) $\dfrac{\mathrm{Ker}\, F_{Q_2}}{\mathrm{Ker}F_{Q_2} \cap \mathrm{Im}F_{Q_2}}$ si trasforma nel sottospazio simplettico

$$\{(x,\xi) \,|\, x_o = \dots = x_{n'} = 0, \xi_o = \dots = \xi_{n'} = 0\}$$

(ii) $\mathrm{Ker}F_{Q_2} \cap \mathrm{Im}F_{Q_2}$, "la foglia", si trasforma nel sottospazio isotropo $1+\ell$ dimensionale

$$\{(x,\xi) \,|\, x_1 = \dots = x_d = 0, \dots, x_{\ell+1} = \;\; = x_n = 0 \;,\; \xi_o = 0,$$

$$\xi_{d+1} = \dots = \xi_n = 0\}$$

(iii) $\mathrm{Im}\, F^2_{Q_2}$ si trasforma nel sottospazio simplettico

$$\{(x,\xi) \,|\; x_o = \dots = x_\ell = 0 \;,\; x_{n'+1} = \dots = x_n = 0,$$

$$\xi_o = \dots \; \xi_\ell = 0 \;,\; \xi_{n'+1} = \dots = \xi_n = 0\}$$

(iv) In queste nuove coordinate

$$P_\rho(x,D) = \{(D_o-\langle\lambda',x'\rangle D_n-\langle\lambda'',D''\rangle)\,\cdot$$

$$\cdot\,[-D_\rho^2 + 2D_oL_1(x'D_n,D'') + 2D_oL_2(x'''D_n,D''')$$

$$+ Q^{(1)}(x'D_n,D'') + Q^{(2)}(x'''D_n,D''')$$

$$+ Q^{(3)}(x'D_n,D''\ ;\ x'''D_n\ ,D''')] +$$

$$+ (c_oD_o+\langle c',x'\rangle D_n+\langle c'',D''\rangle+\langle c_1''',x'''\rangle D_n$$

$$+ \langle c_2''',D'''\rangle)D_n\}D_n^{m-3} + O(\rho^{-1/2sn})$$

dove $L_1(L_2)$ è una forma lineare su $R^\ell(R^{2(n'-\ell)})$, $Q^{(1)}(Q^{(2)})$ è una forma quadratica definita positiva su $R^\ell(R^{2(n'-\ell)})$ e $Q^{(3)}$ è una forma reale bilineare su $R^\ell x R^{2(n'-\ell)}$. Le coordinate possono inoltre essere scelte in modo tale che $Q^{(2)}(x''',ix''') = 0$. Senza minor generalità $m = 3$ d'ora in poi. Dilatando con $(x_o,x',x'',x''',x^{iv},x_n) \to (\frac{x_o}{\rho^2}, \frac{x'}{\rho^3},x'',\frac{x'''}{\rho^2}, x^{iv}, \frac{x_n}{\rho^4})$, insieme con la sua duale e coniugando con

$$E_\rho(x) = \exp(-\frac{1}{2}\rho^2|x'''|^2\xi_n+i\rho^2x_n\xi_n + i\,\rho^3\langle x'',\xi''\rangle + i\rho\phi(x))$$

dove ξ'', $\xi_n>0$ e ϕ fase C^∞ saranno scelti più tardi si ottiene un nuovo localizzato $P_\rho(x,D)$ che può essere sviluppato secondo le potenze decrescenti di ρ per ottenere:

$$(4)\qquad P_\rho(x,D) = \rho^4\{(\phi_{x_o}-\langle\lambda',x'\rangle\xi_n-\langle\lambda'',\xi''\rangle)\,\cdot$$

$$\cdot[2\phi_{x_o}L_2(x'''\xi_n,ix^m\xi_n)+2\langle A^{(2)}x'''\xi_n,X'''\phi_{x_m}\rangle +$$

$$+ 2\langle C^{(2)};x'''\xi_n,\phi x'''\rangle + Q^{(3)}(x'\xi_n,\xi'';x'''\xi_n;x'''\xi_n) +$$

$$+ 2\langle B^{(2)}x'''\xi_n, \phi_{x'''}\rangle + 2i\langle B^{(2)}x'''\phi_n, x'''\xi_n\rangle] +$$

$$+ (\langle c_1''', x'''\rangle\xi_n + \langle c_2'''; ix'''\xi_n\rangle)\xi_n\}+$$

$$+ \rho^3\{(\rho_{x_o} - \langle\lambda', x'\rangle\xi_n - \langle\lambda'', \xi''\rangle)[-\phi^2_{x_o} + 2y_{x_o}L_1(x'\xi_n, \xi'')$$

$$+ 2\phi_{x_o}L_2(x'''\phi_{x_n}, \phi x''') + 2L_2(x'''\xi_n, ix'''\xi_n)D_o$$

$$+ Q^{(1)}(x'\xi_n, \xi^n) + 2\langle A^{(2)}x'''\xi_n, x'''D_n\rangle +$$

$$+ \langle A^{(2)}x'''x'''\rangle\phi^2_{x_m} + 2\langle C^{(2)}; x'''\xi_n, D'''\rangle$$

$$+ \langle C^{(2)}\phi x''', \phi x'''\rangle + \xi_n TrC^{(2)} +$$

$$+ 2\langle B^{(2)}x''', D'''\rangle\xi m + 2\langle B^{(2)}x'''\phi x_{'''}, \phi_{x'''}\rangle$$

$$+ 2i\langle B^{(2)}x''', D'''\rangle\ \xi_n$$

$$+ Q^{(3)}(x'\xi_n, \xi''; x'''\phi x_n, \phi_{x'''}) +$$

$$+ Q^{(3)}(x'\phi x_n, 0; x'''\xi_n, ix'''\xi_n)] +$$

$$+ (D_o - \langle\lambda, x'\rangle\phi_{x_n})[2\phi_{x_o}L_2(x'''\xi_n, ix'''\xi_n) +$$

$$+ 2\langle B^{(2)}x'''\xi_n, \phi x'''\rangle + 2\langle A^{(2)}x'''\xi_n, x'''\phi_{x_n}\rangle +$$

$$+ 2\langle C^{(2)}ix'''\xi n, \phi x'''\rangle + Q^{(3)}(x'\xi_n, \xi''; x'''\xi_n, ix''\xi_n)$$

$$+ 2i\langle B^{(2)}x'''\phi x_n, x'''\xi_n\rangle] +$$

$$+ (C_o\phi_{x_o} + \langle c', x'\rangle\xi_n + \langle c'', \xi''\rangle + \langle c''', x'''\rangle\phi_{x_o} +$$

$+ \langle C_2''', \phi_{x'''} \rangle)\xi_n + \phi_{x_n}(\langle C_1''', x''' \rangle \xi_n + \langle C_2'''; i x''' \xi_n \rangle)\} + O(\rho^2)$

dove abbiamo posto

$$Q^{(2)}(x''',\xi''') = \langle A^{(2)}x''', x''' \rangle + 2\langle B^{(2)}x''', \xi''' \rangle + \langle C^{(2)}\xi''', \xi''' \rangle$$

$$A^{(2)} = C^{(2)} = {}^tC^{(2)}, \quad {}^tB^{(2)} = -B^{(2)}$$

Notiamo che $\mathrm{Tr}^+F_{Q_2} = \mathrm{Tr}C^{(2)}$. Denotando con t le variabili involutive $(x'\xi_n, \xi'')$ e $Q^{(3)}(t;x''',\xi''') = 2\langle M_1 t, x''' \rangle + 2\langle M_2 t, \xi''' \rangle$ osserviamo che il nostro scopo è di annullare il termine in ρ^4 in (4) usando serie formali di potenze, rispetto a $x'''=0$, le variabili simplettiche spaziali. Il primo problema è quello di determinare la fase a $x''' = 0$. Calcolando il termine in $\rho 4$ a $x'''=0$ ed esplicitando $\phi_{x'''}$ si ha

$$(5) \qquad \phi_{x'''} = -iF[-\frac{\xi n}{2}\frac{1}{\psi_{x_o}} C_1 - \psi_{x_o} L_2 - Ht]$$

dove $F = (C^{(2)} + iB^{(2)})^{-1}$,

$$\psi = \phi - x_o \langle \Lambda, t \rangle$$

$$\Lambda = (\lambda', \lambda''), \quad C_1 = C_1''' + iC_2'''$$

$$L_2 = L_2' + iL_2''$$

$$H = M + L_2 \quad \Lambda, \quad M = M_1 + iM_2$$

Per alleggerire le notazioni vediamo come si determina ϕ con $\mathrm{Im}\phi \geq c|x|^2$ nel caso dell'operatore modello (M). (5) diventa

$$\phi_{x_2} = i\,[\frac{\xi_n}{2}\frac{1}{\psi_{x_o}} c], \text{ con } c = c_3 + ic_2$$

Calcoliamo ora il coefficiente di ρ^3 $x_2 = 0$ e sostituiamo il valore di ϕ_{x_2} ottenuto. Si ha l'equazione di 4° grado in ψ_{x_o} :

$$(6)\qquad \psi_{x_o}^4 + 2\ell\xi_1\psi_{x_o}^3 - [(1-\ell^2)\xi_1^2 + \xi_n(c_o+\mu)]\psi_{x_o}^2$$

$$- \xi_n(C_1+\ell c_o)\xi_n\psi_{x_o} + L_4\xi_n \frac{|c|^2}{n} = 0$$

dove $t = \xi_1$, $\Lambda = \ell$, $F = 1$, $H = 0$.

E' immediato vedera ora come c_o e c_1 debbano essere reali. Se, per esempio, $c_o \in C\backslash R$ (6) con $\xi_1 = 0$ si riduce a

$$(6)'\qquad \psi_{x_o}^4 - \xi_n(c_o+\mu)\psi_{x_o}^2 + \frac{1}{4}\xi_m^2 \frac{|c|^2}{\mu} = 0$$

che ha certamente una soluzione ψ_{x_o} con $\mathrm{Im}\psi_{x_o} < 0$.

Analogamente si ragiona se $C_1 \in C\backslash R$. (La prova che c_2 e $c_3 \in R$ è più semplice e si ottiene da subito localizzando opportunamente l'operatore. Qui è omessa).

Vediamo da ultimo come $L1)_\ell$, che in questo caso è $\mu \geq |c_o| + \sqrt{\frac{1}{u}|c|^2 + (|C_1|-\ell n)^2}$, sia necessaria. La prova è in effetti la stessa del caso generale. L'equazione (6) con $\xi_n = 1$ può essere riscritta:

$$(7)\qquad [\frac{1}{\sqrt{1-\ell^2}}(\psi_{x_o}^2 - \frac{1}{2}[c_o+\ell c_1+\mu(1-\ell^2)]) +$$

$$+\sqrt{1-\ell^2}\,(- \frac{\ell}{1-\ell^2}\psi_{x_o}^2 + \xi_1\psi_{x_o} + \frac{C_1+\ell co}{2(1-\ell^2)})] \cdot$$

$$\cdot [\frac{1}{\sqrt{1-\ell^2}}(\psi_{x_o}^2 - \frac{1}{2}[c_o + \ell c_1 + \mu(1-\ell^2)] -$$

$$- \sqrt{1-\ell^2}\left(- \frac{\ell}{1-\ell^2}\psi_{x_0}^2 + \xi_1\psi_{x_0} + \frac{c_1+\ell c_0}{2(1-\ell^2)}\right)] =$$

$$= \frac{1}{4}[(c_0+\mu)^2 - (c_1-\ell\mu)^2 - \frac{|c|^2}{4}]$$

e la quantità a secondo membro è esattamente quella che compare nella condizione di Levi. Se quest'ultima è falsa si ha:

(i) $\qquad (C_1-\ell\mu)^2 > (c_0+\mu)^2$

oppure

(ii) $\qquad (c_1-\ell\mu)^2 \leqq (c_0+\mu)^2$

Mostreremo ora che l'equazione (6) ha al più 2 zeri reali.

Nel caso (i) la (6) può essere riscritta nella forma

$\psi_{x_0} g(\psi_{x_0}) + \frac{1}{4}\frac{|c|^2}{\mu} = 0$, dove $g(\psi_{x_0}) = \psi_{x_0}^3 + 2\ell\xi_1\psi_{x_0}^2 - (1-\ell^2)\psi_{x_0} - (c_0+u)\psi_{x_0} -$

$- \xi_1(c_1+\ell c_0)$

Osserviamo ora che $\exists\xi_1 \in R$ tale che $g(\psi_{x_0}) = 0$ ha un solo zero reale. Infatti, se $P_3(S_0,\sigma)$, $S_0 \in R$, $\sigma \in R^k$ è un polinomio omogeneo del terz'ordine che ha tre zeri reali in S_0 per ogni σ e $P_1(S_0,\sigma)$ è un polinomio omogeneo del primo ordine, allora $P_3 + P_1$ avrà tre zeri reali in S_0, $\forall\sigma$ se $\nabla_{S_0,\sigma} P_1$ appartiene al polare euclideo del cono di iperbolicità di P_3. Ora per g questa condizione è equivalente a (ii). Quindi g ha un solo zero reale ζ che possiamo supporre negativo se (i) vale. Dato che $h(\psi_{x_0}) = \psi_{x_0} g(\psi_{x_0})$ ha un solo minimo relativo in $[\zeta,0]$ questo completa la prima parte. D'altronde se (ii) vale scegliendo

$\xi_1 = \left|\frac{C_1-\ell\mu}{2}\right| \sqrt{\frac{2}{C_0+u+\ell(c_1-\ell u)}}$ la (6) può anche essere riscritta da (7)

$$(8)\qquad [\frac{1}{1-\ell^2}(\psi_{x_o}^2 - \frac{1}{2}[c_o + +\ell(c_1-\ell\mu)]^2 -$$

$$- (1-\ell^2)(-\frac{\ell}{i-\ell^2}\psi_{x_o}^2 + \xi_1\psi_{x_o} + \frac{c_1+\ell c_o}{2(1-\ell^2)}]$$

$$= \frac{1}{4}[(c_o+\mu)^2 - (c_1-\ell\mu)^2 - \frac{|c|^2}{\mu}]$$

Si vede che per $\psi_{x_o}^2 = \frac{1}{2}[c_o+\mu+\ell(c_1-\ell\mu)]$ il primo membro di (8) ha un minimo relativo e questo basta per concludere che anche in questo caso la (6) può essere risolta con $\mathrm{Im}\psi_{x_o} < 0$.

Questo termina la costruzione, nel caso modello, della fase a $x_2 = 0$. per determinare completamente la soluzione asintotica u_ρ nella forma $E_\rho(x)\sum_{j\geq 0}\rho^{-j}v_j(x)$ occorre spingersi in (4) fino a $O(\rho)$, per poter risolvere le equazioni di trasporto che sono in generale Fuchsiane e coinvolgono condizioni sui termini d'ordine infefiore. Si rimanda a [B-B]2 e a [H] per i dettagli e i lemmi di risolubilità.

3. IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2

Ragioniamo per semplicità nel caso dell'operatore modello (M). La tecnica per dimostrare che $L1)_s$ e L2) sono sufficienti a garantire la buona posizione del problema di Cauchy con dati a $x_o = 0$ è standard e consiste nel moltiplicare opportunamente in $L^2(R^n)$ l'operatore e ottenere una energia definita positiva. Più precisamente se $P(x,D) = (D_o-\ell D_1)(-D_o^2+D_1^2+n(D_2^2+x_2^2D_n^2)) + (c_oD_o+c_1D_1 + c_2D_2 + c_3x_2D_n)dn$ sia $M(x,D) = -D_o(D_o-\ell D_1)+\gamma Dn$ con $\gamma\in R^+$ da determinarsi e poniamo $2i\mathrm{Im}\langle Pu,Mu\rangle$, dove $\langle f,g\rangle = \int f(x_o,x)\bar{g}(x_o,x')dx'$. Osserviamo che P può essere riscritto come:

$$P = D_o M + (D_o - \ell D_1)(D_1^2 + \mu X^* X)$$

$$+ ((c_o + \mu - \gamma) D_o + (c_1 - \ell\mu) D_1 + \mathrm{Re}(cX) D_n)$$

dove $X = D_2 + ix_2 D_n$; $c = c_2 + ic_3$, $u \in C_o^\infty$.

Integrando per parti si vede facilmente che

(9) $\quad i\,\mathrm{Im}\langle Pu, Mu\rangle = D_o E$, dove

$$E = |Mu|^2 + |D_1(D_o - \ell D_1)u|^2 +$$

$$+ \mu|X(D_o - \ell D_1)u|^2 + \gamma|D_1 u|^2_{1/2} +$$

$$+ \mu\gamma|Xu|^1_{1/2} + (c_o + \mu - \gamma)|D_o u|^2_{1/2} + \gamma(c_o + \mu - \gamma)|\mu|^2_1 +$$

$$+ \mathrm{Re}(c_1 - \ell\mu)\langle D_1 u, D_o D_n u\rangle + \mathrm{Re}(c_1 - \ell\mu)\langle D_1 D_n u, (D_o - \ell D_1)u\rangle$$

$$+ \mathrm{Re}\langle \mathrm{Re}((cX) D_n u, D_o u\rangle + \mathrm{Re}\langle \mathrm{Re}(cX) D_n u, (D_o - \ell D_1)u\rangle$$

dove $|u|^2_s$ indica la norma di u in $H^s(R^n)$. Per provare che E è definita positiva se $L1)_s$ e L2) valgono lavorando microlocalmente con $\xi_n > 0$, passiamo a notazione matriciale:

$$\left\langle \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{c_1 - \ell n}{2} \\ 0 & \mu & \frac{c}{2} \\ \frac{c_1 - \ell\mu}{2} & \frac{\bar{c}}{2} & \gamma(c_o + \mu - \gamma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1(D_o - \ell D_1)u \\ X(D_o - \ell D_1)u \\ D_n u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1(D_o - \ell D_1)u \\ X(D_o - \ell D_2)u \\ D_n u \end{vmatrix} \right\rangle$$

$$+ \left\langle \begin{vmatrix} \gamma & 0 & \frac{c_1-\ell\mu}{2} \\ 0 & \mu\gamma & \frac{c}{2} \\ \frac{c_1-\ell\mu}{2} & \frac{\bar{c}}{2} & c_0+\mu-\gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1u \\ Xu \\ D_0u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1u \\ Xu \\ D_0u \end{vmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} + |Mu|^2 = E' + |Mu|^2 .$$

Si vede subito che se si sceglie $\gamma = \frac{c_0+\mu}{2}$ entrambe le matrici sono definite positive se L1) è soddisfatta.

Finalmente moltiplichiamo per ie^{-2rx_0} e integriamo per $x_0>0$ la (9); si ha:

$$(10) \qquad \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{0} |Pu|^2 e^{-2rx_0} dx_0 \geq E(0) + \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{-2rx_0}|Mu|^2 dx_0 + $$

$$+ 2r \int_{-\infty}^{0} e^{-2rx_0} E'(x_0)dx_0$$

Con argomenti standard di analisi funzionale (vedi [H]) si deduce allora che il problema di Cauchy è ben posto a $x_0 = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[B] E. BERNARDI, "The Cauchy problem fo ra model equation with triple characteristics", in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl..

[B-B]1 E. BERNARDI-A. BOVE, "Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics" Comm. in P.D.E., 13(1), 61-86.

[B-B]2 E. BERNARDI, A. BOVE, "Necessary and sufficient conditions for the well-posedness of the Cauchy problem for a class of hyperbolic operators with triple characteristics", Preprint.

[H] L. HÖRMANDER, "The Cauchy problem for differential equations with double characteristics. J. d'An. Math. 32 (1977), 118-190.

[I] V. Ja IVRII, "The well-posedness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic operators III, The energy integral". Trans. Moscow Math. Soc. 34 (1978), 149-168.

[I-P] V. Ja IVRII, V. PETKOV, "Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations", Uspeki Mat. Nauk. 29: 5 (1974), 3-70.

[N] T. NISHITANI, "Hyperbolic operators with symplectic multiple characteristics", Preprint.